La caractéristique géométrique de G. W. Leibniz : présentation et perspectives.

Thomas de Vittori

La caractéristique géométrique de G.W.Leibniz : présentation et perspectives

Thomas de Vittori*

La naissance du projet

Entre 1672 et 1676, Leibniz séjourne à Paris et à cette occasion il rencontre de nombreux savants. En particulier, il y croise Huygens qui entreprend d'initier le jeune philosophe à la géométrie. Avant son arrivée à Paris, les connaissances de Leibniz sur le sujet étaient quasiment nulles et Huygens commence par lui prodiguer quelques conseils de lectures. Les livres proposés comprennent la *Géométrie* de Descartes, que Leibniz ne consultera qu'en 1674, et un certain nombre d'autres traités, en particulier des écrits de Pascal dont *L'introduction à la géométrie*, un ouvrage aujourd'hui perdu mais dont on connaît une partie du contenu par l'intermédiaire des notes prises par Leibniz. À cela s'ajoutent quelques écrits de Desargues, pour ne citer que ceux qui ont plus ou moins contribuer à la naissance d'un projet de recherches géométriques chez Leibniz. Dès le départ, Leibniz n'est pas satisfait du genre de géométrie qu'il a entre les mains. Excepté chez Pascal et Desargues, il s'agit d'une géométrie très analytique qui ne répond pas à ses attentes.

Avant tout philosophe, le travail de Leibniz s'inscrit dans une thématique générale qui cherche à réfléchir sur ce que serait une pensée juste. Au cours de l'année 1679, Leibniz rédige un ensemble de textes qui permettent de situer son projet.

> *Les Méthodes Géométriques auxquelles je songe sont au nombre de deux ; la première consiste à exprimer complètement une figure en n'utilisant que des caractères, sans l'aide d'explications verbales et sans y adjoindre de figure ; la seconde consiste à le faire en n'utilisant que des mots, sans l'aide d'aucun autre caractère et sans l'aide d'aucune figure.* (Leibniz, *la Caractéristique Géométrique*, [CG] p.47)

Leibniz crée une dichotomie entre deux manières de penser la géométrie. Il détaille ensuite ces deux possibilités et les critiques qu'on peut faire à ces démarches tout aussi insatisfaisante l'une que l'autre. Sur la méthode verbale, qui consiste à discourir en géométrie avec la langue usuelle, il note qu'elle *a pour effet de mettre toujours dans l'esprit l'idée de l'objet étudié*, ce qui est un avantage. En effet, de la même manière que lorsqu'on parle d'un chat, on a l'idée de chat, lorsqu'on parle d'un triangle on a l'idée de triangle. Tant qu'on en parle on ne perd pas de vue l'objet, ce qui permet au géomètre *de lui donner conscience d'avancer par degrés d'une vérité nouvelle à l'autre*. Le cheminement de la pensée est ainsi relativement limpide mais *l'emploi de termes de la langue ordinaire dans cette méthode a cet inconvénient d'exposer les connexions, les transitions et les inférences, à diverses ambiguïtés*. Le problème est bien connu, la logique de la langue est loin de coïncider avec la logique mathématique. Pour Leibniz, la piste d'une solution réside dans la deuxième méthode, celle des caractères, car ceux-ci *sont très simples et ne s'appuient, en dehors des lettres, que sur quelques symboles comme congruence, égalité, rapport, proportion, similitude, coïncidence*. Les difficultés de la langue verbale semblent résolues par les caractères, mais ce n'est qu'une apparence. Pour Leibniz, *l'inconvénient de la méthode caractéristique est qu'au cours d'une opération, en d'autres termes, dans un calcul, l'esprit n'a pas l'idée de l'objet qu'il est en train d'étudier*. À ce moment, Leibniz a en tête la géométrie de Descartes et Viète pour laquelle, après de longues pages de calcul, la nature de l'objet que l'on considérait au départ peut être perdue de vue. Quelle est alors la solution ? Pour trouver une réponse à ce problème, Leibniz se place un cadre général. Il explique que *si on disposait d'une langue philosophique,* c'est-à-dire une langue dont à la fois les termes seraient parfaitement clairs et qui présenterait les connexions entre ces termes, *elle rassemblerait tous les avantages de tous les caractères*. Il est à noter que même Leibniz considère

* Ce texte reprend le contenu de la conférence donnée dans le cadre du colloque Inter-IREM organisé par la commission Épistémologie et Histoire des Mathématiques le 23 mai 2008. Outre sur nos travaux, cette présentation s'appuie très largement sur l'ouvrage *La caractéristique géométrique* (texte inédit établi et introduit par J. Echeverria, traduit (latin en vis-à-vis) et annoté par M. Parmentier, Vrin), dont nous conseillons vivement la lecture.

cela comme un projet, un but à atteindre, car malheureusement la langue philosophique est sans doute à jamais inaccessible aux hommes. Il reste à Leibniz à préciser les liens entre cette idée de langue philosophique et la géométrie.

> *Il est impossible de formuler exactement un problème en n'utilisant que des figures sans aucun mot ni aucun caractère car beaucoup de choses ne peuvent pas être dessinées. Le pourraient-elles, la figure devient souvent trop embrouillée et sa complexité trop grande pour ne pas semer la confusion dans l'esprit de celui qui la contemple.* (Leibniz [CG] p.49)

Un reproche que Leibniz fait à l'utilisation des figures en géométrie, c'est que dès qu'on essaie d'y faire entrer toutes les données, on obtient rapidement une situation visuellement inexploitable. Il s'agit déjà d'une limitation importante, mais la plus grosse difficulté ne situe toutefois pas là. La critique la plus profonde est adressé à de la démarche analytique.

> *On ne voit pas encore dans l'Analyse Géométrique une discipline achevée. Même si en effet la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par le calcul, en faisant la supposition des Eléments, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits.* (Leibniz [CG] p.51)

Pour Leibniz, l'une des limites de la géométrie à la Descartes, c'est qu'elle présuppose déjà la géométrie d'Euclide. Pour pouvoir faire de la géométrie cartésienne, on doit pouvoir poser des grandeurs et les relations entre ces grandeurs et pour cela, il faut déjà avoir les *Éléments* d'Euclide (en particulier des segments, des droites, etc.). Cette dépendance aux *Éléments* rend cette géométrie caduque car elle ne contient pas ses propres fondements. Pour Leibniz une géométrie doit être capable de tout démontrer depuis le début, et c'est là son projet.

> *J'ai déjà songé à palier ce défaut en tâchant de faire apparaître dans un calcul tout ce qui concerne la figure et la situation, ce qui est nouveau : les Analystes se contentent d'y faire entrer les grandeurs en supposant les situations connues à partir de la figure, ils ne peuvent donc se dispenser de tracer des lignes et des figures et de mettre à contribution l'imagination.* (Leibniz [CG] p.51-53)

La géométrie analytique n'est pas achevée en ce sens qu'elle ne peut pas se dispenser d'une partie figurée. L'élaboration de la nouvelle géométrie qu'il nomme *caractéristique géométrique* repose sur l'utilisation exclusive de caractères. Le but, et c'est ce qui est nouveau, est que ces caractères doivent concerner la figure mais aussi la situation, c'est-à-dire les relations qu'entretiennent les figures les unes avec les autres.

Définition et rôle des caractères

Dans un premier temps, Leibniz commence par définir la brique élémentaire de son système, c'est-à-dire le caractère.

> *Les Caractères sont des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles. À toute opération sur les caractères correspond donc une proposition portant sur les objets et avant de considérer ceux-ci nous pouvons souvent attendre d'avoir achevé l'opération.* (Leibniz [CG] p.143)

Il s'agit déjà d'associer aux objets des caractères sur lesquels on pourra ensuite travailler.

> *Les Caractères Algébriques en effet n'expriment pas tout ce qu'il y a dans l'espace,*

ne représentent pas directement et en elle-même la situation des points et ne l'atteignent qu'au terme d'un grand circuit passant par les grandeurs. (Leibniz [CG] p.145)

Comme Leibniz l'a déjà fait remarquer dans ses études préliminaires, même avec un système de coordonnées, les caractères algébriques ne nous renseignent pas sur la manière dont les points se situent les uns par rapport aux autres. Dans chaque cas, il faut travailler sur ces données pour pouvoir obtenir ce genre d'information. Leibniz aimerait avoir un accès direct afin que le symbole même exprime de manière claire la situation des objets. Leibniz remarque que *le seul fait de symboliser les points d'une figure par des lettres suffisait à en manifester certaines propriétés.* Si par exemple, on écrit A et plus loin B, on construit déjà une éventuelle distinction entre les deux. Il peut s'agir du même objet, mais ainsi posé, si la lettre n'est pas la même, il se peut que ces deux points soient différents. Donc il y a création de quelque chose. Leibniz poursuit :

[...] j'en suis venu à me demander si toutes les relations liant les points de chaque figure ne pouvaient pas être symbolisées par elles en sorte que la figure soit complètement représentée par une caractéristique et que des résultats qu'on obtient à grand-peine en traçant des lignes embrouillées, quand on les obtient, on les découvre simplement en combinant et en transposant des lettres. (Leibniz [CG] p.147)

Le cœur du projet est de créer un nouveau calcul, qui ne soit pas un calcul sur les grandeur, mais un calcul géométrique dont l'élaboration nécessite une remise à plat de l'ensemble de la géométrie.

Élaboration des notations

Avant d'entrer dans le détail de l'élaboration du système, il est important de rappeler qu'il s'agit d'un ensemble de texte que Leibniz n'a pas édité sous forme d'ouvrage. Ces travaux d'un savant à l'œuvre sont avant tout un processus. Leibniz est en train d'élaborer une théorie et les notations vont changer plusieurs fois. Ce qui suit est un exemple issu des premiers travaux de 1679.

∞ signifie identique, par exemple A∞B signifie que les points A et B coïncident, en d'autres termes qu'ils sont en même temps dans le même lieu.
γ signifie congru, c'est-à-dire pouvant occuper le même lieu en gardant la situation de ses parties.
Π signifie égale, c'est-à-dire ce qu'on peut rendre congru, après modification de la situation des parties si nécessaire. +a+b Π c signifiera que c est le tout, a, b les parties. (Leibniz [CG] p.117)

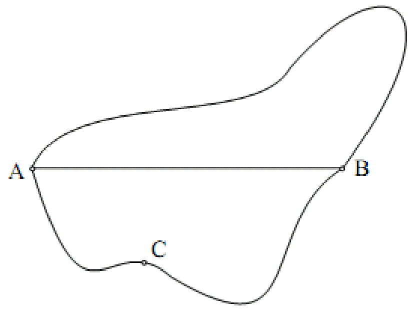
Après la définition de l'identité, de l'égalité et de la congruence, cette dernière étant amenée à jouer un rôle fondateur dans la suite, Leibniz introduit un nouveau symbole qui représente la relation dans toute sa généralité.

A.B. représentera la relation entre A et B. De la même manière, A.B.C. la relation entre A, B, C. (Leibniz [CG] p.117)

Noté A.B., parfois A.B, ce simple point vise à éclairer la situation de l'ensemble des objets. A ce stade, on remarque l'absence de figures ce qui est évidemment l'une des caractéristiques de son projet. L'objet fondamental est la relation. Comment peut-on rendre compte dans un calcul d'une relation géométrique entre deux objets eux aussi géométriques ? Pour expliciter un peu son propos, Leibniz revient aux objets les plus simples que sont les points.

A.B représente la situation mutuelle des A et B, c'est-à-dire un extensum (rectiligne *ou curviligne, peu importe) qui les relie et demeure le même tant que cette situation ne varie pas.* (Leibniz [CG] p.235)

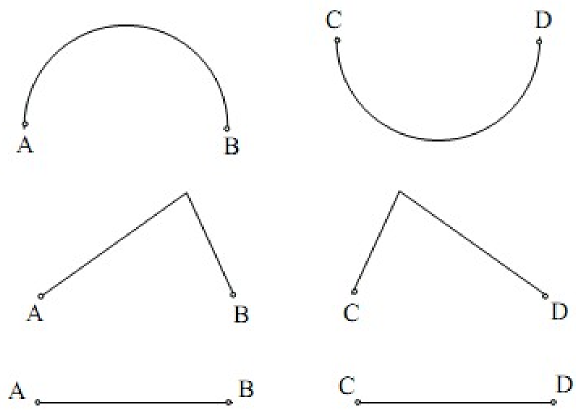
La relation entre A et B naît de ce que le philosophe appelle la coexistence de deux points qui permet, par exemple, de concevoir l'espace entre les deux. Pour mettre en lien cette idée de relation entre deux objets, Leibniz propose comme représentation une étendue unidimensionnel, une ligne qui relie les points A et B.



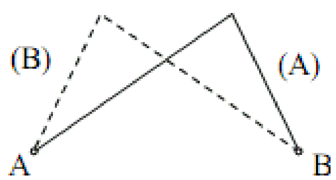
De la même façon A.B.C représente la situation mutuelle des trois points A, B, C (un extensum rigide qui les relie). On peut considérer qu'on poursuit ainsi pour un plus grand nombre de points. (Leibniz [CG] p.235)

Ainsi, les points sont reliés entre eux par des morceaux d'étendue. Les définitions proposées par Leibniz semblent convenir pour les points, mais peut-on vraiment construire une géométrie sur ces bases ? Pour poursuivre l'échafaudage, il faut revenir au deuxième symbole proposé qui est la congruence

A.B γ C.D signifie que la relation entre les points A et B est la même qu'entre les points C et D. En d'autres termes, l'extensum reliant A et B, mais aussi bien tout autre extensum qui lui soit congru, peuvent également relier C et D. (Leibniz [CG] p.237)



Dans tous les exemples proposés, la relation entre A et B (*A.B*) est congrue (γ) à la relation entre C et D (*C.D*). La relation entre A et B, peut servir comme relation en C et D. De la même manière, il y a une forme de symétrie car A.B c'est aussi B.A.



La structure devient mathématiquement intéressante et une première conclusion s'impose.

> *Toutes ces congruences permettent de définir différentes espèces d'extensa, à savoir de Lieux de Points, dont je noterai les points invariables par les premières lettres de l'alphabet A, B ou C, et les points variables par les dernières, X, Y, ou Z.* (Leibniz [CG] p.241)

A, B et C sont les données, par exemple les points d'un problème géométrique et les point X, Y, Z sont les points variables. Il reste à voir comment définir les figures à partir de ces ensembles de points, c'est-à-dire de lieux.

> *Le lieu le plus simple, mais aussi le moins limité, est celui de tous les points congrus à un point donné, puisque c'est le lieu de tous les points en général, soit l'espace infini, n'importe quel point de l'univers étant congru à un autre point donné. Supposons la congruence A γ Y, le lieu de tous les Y sera l'Espace infini.* (Leibniz [CG] p.243)

Le lieu le plus simple consiste en un point invariable A et une relation entre ce point et un point Y variable. D'après les définitions de Leibniz, AγY, c'est-à-dire l'ensemble des points congrus à A, n'est rien de moins que l'espace tout entier. Leibniz propose donc une formule pour l'espace. Ce résultat est prometteur pour la mise en place d'une géométrie. Leibniz est enthousiaste et évoquera ceci dans sa correspondance avec Huygens.

> *Le lieu suivant le lieu de tous les points est celui de toutes les régions sphériques, c'est-à-dire le lieu de tous les points ayant la même situation à l'égard d'un point donné. Soit par exemple la congruence A.Y γ A.(Y), le lieu de tous les Y sera sphérique*
>
> *En prenant sur cette même surface sphérique un point B constant, on peut exprimer le même lieu par A.B γ A.Y.* (Leibniz [CG] p.243)

Pour élaborer le lieu suivant, et donc un nouvel objet, Leibniz considère une première relation A.Y fixée et A.(Y) où (Y) intervient comme une deuxième variable. Comme Y est variable, on a ainsi l'ensemble des sphères de centre A, ou plus exactement l'ensemble des surfaces sphériques. Si ensuite on fixe la relation A.Y en une relation A.B, la relation A.BγA.Y détermine une sphère. De la même manière, par les relation A.XγB.X et A.B.CγA.B.Y Leibniz définit un plan, respectivement un cercle. Désormais, pour Leibniz, l'espoir est grand d'atteindre tous les *Éléments* d'Euclide. Malheureusement il va se heurter à un certain nombre d'autres objets, dont la droite. Après de nombreux essais, il n'obtiendra pas avec son calcul de définition satisfaisante. Au mieux, la définition de la droite fait intervenir deux congruences, ce qui dérange Leibniz car la droite devrait être un objet simple.

À l'issue de ces réflexions, en dehors des difficultés concernant la droite, Leibniz réussit à construire les objets principaux, ce qui pour lui est plus ou moins suffisant. Il sait qu'il est sur le chemin du programme de cette caractéristique géométrique, premier pas vers une langue philosophique. Leibniz a selon lui les atouts pour convaincre la communauté scientifique, mais cette dernière est-elle prête à entendre ? Contrairement à ses attentes, sa correspondance avec Huygens ne lui ouvrira pas les portes de l'Académie des Sciences de Paris et son départ en 1676 ne fera qu'accentuer cette situation. Huyghens, malgré l'estime qu'il porte Leibniz, n'est pas aussi enthousiaste que lui. Une des raisons est peut-être que le seul résultat, obtenu après des pages et des pages de recherche, n'est rien d'autre que la définition d'un cercle. Seul le Marquis de L'Hôpital semble conquis, mais cela ne suffira pas et les idées sur la caractéristique géométrique ne diffuseront pas. Les travaux de Leibniz ne seront valorisés qu'après sa mort, principalement à la suite de l'édition de la correspondance avec Huyghens et d'un concours gagné en 1833 par Grassmann qui rapproche les théories sur la caractéristique géométrique de ses propres travaux sur les espaces abstraits.

La caractéristique géométrique et les questionnements sur le lieu

Lorsqu'on place les textes sur la caractéristique géométrique dans une perspective plus longue, on peut remarquer que le travail de Leibniz prend un sens particulier dans un type de questionnement récurrent dans l'histoire de la géométrie. Dès les premiers écrits de 1679, l'un des objets centraux est la notion de lieu. Tous les objets géométriques proposés par Leibniz sont des lieux de points. Bien plus, l'espace entier est lui aussi un lieu de points. Ici vue à travers les théories leibniziennes, l'idée de travailler la notion de lieu dans le cadre d'une rénovation de la géométrie n'est pas complètement nouvelle. En fait, lorsqu'on retrace la manière dont est perçue l'idée de lieu sur une période assez longue, on peut distinguer trois moments. Le premier couvre la partie hellénistique et le début de la période arabe médiévale. À cette époque, l'idée de lieu est fondée sur les conceptions aristotéliciennes. Le lieu, en toute généralité, n'est autre que la réponse à la question *où ?* et Aristote le définit par abstraction à partir de l'objet sensible. Il pose le lieu comme la surface intérieure du corps enveloppant. Par exemple la surface intérieure de l'air qui enveloppe un objet sera le lieu du dit l'objet. Dans leurs traités, les commentateurs des siècles suivants ne manqueront pas de critiquer cette définition, mais ce uniquement sur le plan philosophique. L'une des thèses les plus radicalement opposée à celle d'Aristote est celle de Philopon qui fait du lieu la partie de l'espace qui contient l'objet. Bien que très riches, ces textes sont surtout philosophiques et pour les mathématiques, la figure en tant que lieu-enveloppe convient aux géomètres. Les premières difficultés apparaissent lorsqu'est introduit le mouvement dans la géométrie. Le mouvement implique des changements de lieu mais aussi d'autres changements plus profonds comme lors d'une homothétie ou d'une affinité. Cette période d'introduction des transformations et du mouvement en géométrie est historiquement datée, elle apparaît au début de la période arabe, vers le 9e siècle. Chez des auteurs comme les Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra ou Ibrāhīm ibn Sinān, il s'agit surtout d'un ensemble de pratiques de démonstrations à partir des transformations. Le travail de théorisation vient dans un deuxième temps avec en particulier un auteur, Ibn al-Haytham (… - après 1040), qui écrit un ensemble de trois traités sur le problème de cette méthode. Dans *L'analyse et la synthèse*, *Les Connus* et *Sur le Lieu*, le géomètre arabe s'interroge sur ce qui change dans une figure. La notion aristotélicienne de lieu, très figée, ne convient plus. Ibn al-Haytham examine plusieurs situations afin de critiquer Aristote. Par exemple, il considère un cube qu'il coupe en deux parallèlement à une de ses faces et reconstitue avec les deux morceaux un parallélépipède (figure 1).

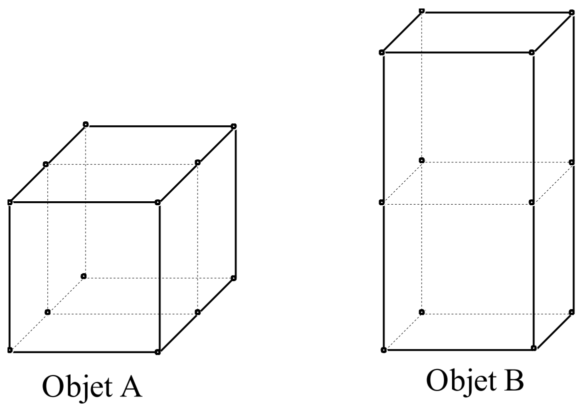


Figure 1.

Pour les deux objets A et B, on n'a pas ajouté ni enlevé de matière, la quantité est la même. Par contre, la surface du parallélépipède sera plus grande que celle du cube. On a donc une situation où la quantité ne varie pas et où le lieu change. En prenant différents exemples, souvent issus de la géométrie, Ibn al-Hayhtam couvre tous les cas possibles (un lieu identique et une quantité qui augmente, ou diminue...). Dans ses ouvrages, Ibn al-Haytham quitte très rapidement la philosophie pour ne s'intéresser qu'à la géométrie où cette question de la définition du lieu engage celle des figures. Pour mettre en place une nouvelle définition du lieu géométrique, l'idée est alors de réfléchir non sur l'objet, mais sur les relations. Ce changement de perspective signale le premier basculement d'une géométrie qui s'intéresse non plus au objets, mais aux relations entre les objets. La définition d'Ibn al-Haytham est la suivante.

> *Puisque tout ce que nous avons montré s'est éclairé, alors le lieu du corps, ce sont les distances qui, abstraites dans l'imagination, sont un vide sans matière, égal au corps, d'une figure semblable à celle du corps, ce que nous voulions démontrer dans ce traité.* (Ibn al-Haytham, *Sur le lieu* in Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du 9^e^ au 11^e^ siècle*, vol. IV, p.684)

À partir de l'objet, on conçoit les relations entre les points de la surface de l'objet. On concidère ensuite les mêmes relations dans un espace imaginé qui possède l'avantage d'être déjà géométrique, donc abstrait. Le lieu résultera de la possibilité de créer une bijection entre ces deux ensembles de distances. Cette définition est particulièrement adaptée à la géométrie car les distances imaginées qui sont généralement conçues comme des segments de droites sont des objets mathématiques. Les limitations comme l'impénétrabilité des solides par exemple disparaissent et le géomètre peut désormais superposer les solides mathématiques, les étirer, etc.

Conclusion

Critiquée sur ses aspects philosophiques par al-Khayyām ou plus tard par al-Baghdādī, l'œuvre d'Ibn al-Haytham diffusera peu après la période arabe. On ne connait pas de transmission directe de ce premier travail sur les relations en géométrie. Les traités de géométrie des siècles suivants reprendront un style euclidien qui gomme toutes ces réflexions sur le rôle du mouvement et sa place dans la définition des figures. S'il n'est pas historiquement lié à celui d'Ibn al-Haytham, le travail de Leibniz est épistémologiquement du même genre (figure 2). Quelques siècles sont passés ce qui permettra d'aller plus loin en concevant non seulement les relations à l'intérieur de l'objet mais aussi toutes les autres. L'espace entier détermine le lieu de l'objet, le tout condensé en une simple formule.

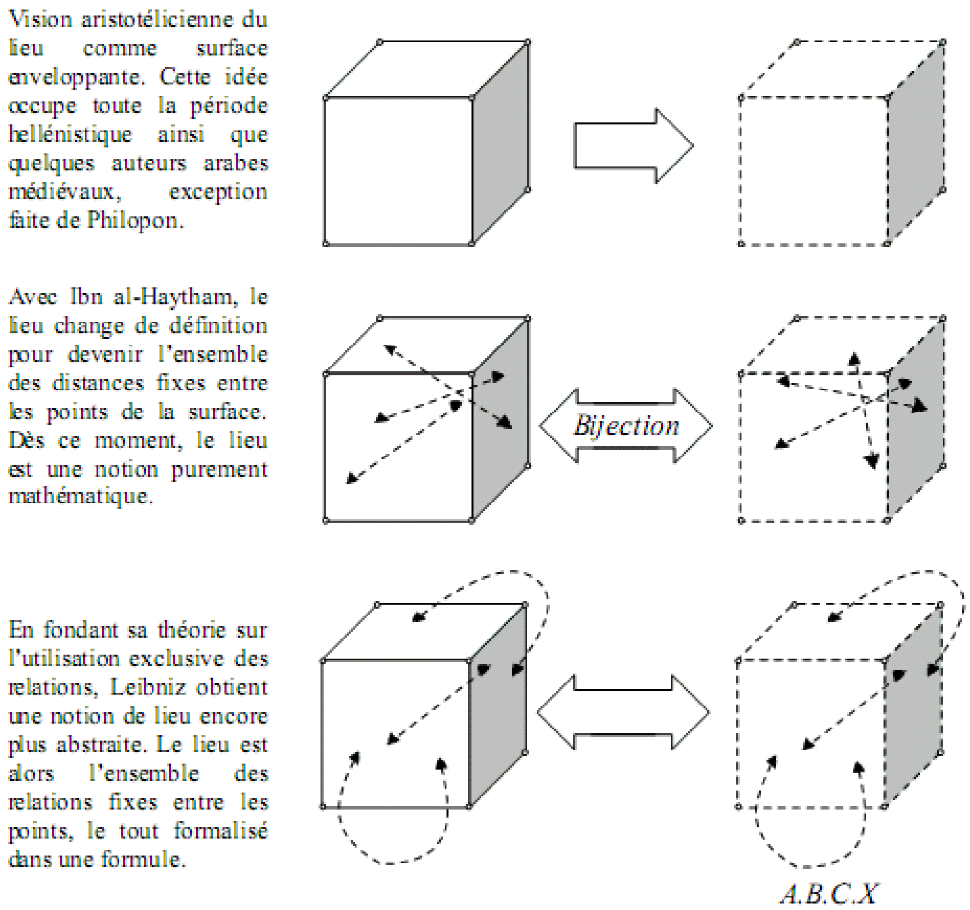


Figure 2.

Bibliographie

Aristote, *Physique*, Trad. A.Stevens, Vrin 1999.
Barbin E., Caveing M. dir., *Les philosophes et les mathématiques*, IREM, Ellipses 1996.
Belaval Y., *Leibniz, initiation à sa philosophie*, Vrin 1993.
Leibniz, critique de Descartes, Gallimard 1960, 2003.
Boi L., *Le problème mathématique de l'espace*, Springer Verlag 1995.
De Risi V., *Geometry and Monadology Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space,* Science Networks. Historical Studies, Vol. 33, Birkhäuse 2007.
Granger G.G., *La pensée de l'espace*, Odile Jacob 1999.
Itard J., *Essais d'histoire des mathématiques*, Blanchard 1984.
Jammer M., *Concepts of space*, Dover 1993.
Leibniz G.W., *La caractéristique géométrique*, Vrin 1995.
Œuvre mathématique, Albert Blanchard 1986-1989.
Pascal B., *Œuvres complètes*, Seuil 1963.
De l'esprit géométrique, document électronique, BNF-Gallica, Aubier 1955.
Philoponus, *Corrolaries on Place and Void*, Trans. D.Furley & C.Wildberg, Duckworth, 1991.
Rashed R., *Les mathématiques infinitésimales du 9^e au 11^e siècle*, vol. I à IV, al-Furqān Foundation 1996-2002.
Al-Qūhī et al-Sijzī: sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques, in *Arabic Science and Philosophy*, vol.13 (2003), Cambridge Univerty Press, 2003.
Sharāf, al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques, Les Belles Lettres, 1986.
Rashed R., Vahabzadeh B., *Al-Khayyām mathématicien*, Blanchard 1999.
Simplicius, *Corollaries on place and time*, Trans. J.O. Urmson, Gerald Duckworth 1992.